数理解析研究所講究録
684巻 1989年 83-91

多次元サイン・ゴルドン型方程式の厳密解

愛知医大　房岡秀郎　（Hideo FUSAOKA）

空間1次元、時間1次元（1+1d）サイン・ゴルドン方程式は、物性、素粒子、生物物理をはじめ多くの分野のモデルを表わす式として研究されてきた。　ただ、より現実的なモデルを考えようとする場合には、空間が2，3次元のサイン・ゴルドン方程式を解く必要があるが、解析的な解はほとんど見つかっていない[1]。　この研究会では、大阪外大の中村明氏より2+1d サイン・ゴルドン方程式の厳密解についての報告があった[2]。　ここでは、多次元のサイン・ゴルドン方程式に似た新しい方程式の厳密解について述べる。

新しい多次元サイン・ゴルドン型方程式は次のように書ける。

$$u_{xx} + a_1 u_{yy} + a_2 u_{zz} - b u_{tt} = F(u) \qquad (1)$$

$$F(u) = 2ck\{\cos(2u) + k(N+1)\cos(u) + N\},\ k=\pm 1 \qquad (2)$$

ここで a_1, a_2, b, cは定数。 N は空間の次元数。 $a_1 \neq 0$, $a_2=0$, と $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ の場合には、それぞれ 2+1d (N=2) と 3+1d (N=3) 方程式に対応する。3+1d ミンコフスキー空間（自然単位）の場合には、$a_1=1$, $a_2=1$, b=1 となり、方程式 (1) はローレンツ変換のもとで不変となる。 もし $a_1=1$, $a_2=1$, b=-1 とすると4次元ユークリッド空間での方程式となる。

関数 F(u) は 2π の周期を持つ周期関数で、特に N=3 の場合には簡単になって、k=1に対して $16c(\cos(u/2))^4$, k=-1 に対しては $-16c(\sin(u/2))^4$ となる。

方程式 (1) の円筒対称解、あるいは球対称解を求めるために、次の変数 r を導入する。

$$r = \{(x-x_0)^2+a_1'(y-y_0)^2+a_2'(z-z_0)^2\}^{1/2},$$

$$a_i' \begin{cases} = 1/a_i & \text{if } a_i \neq 0, \\ = 0 & \text{if } a_i=0, \end{cases} \qquad (i=1,2). \qquad (3)$$

ここで x_0, y_0, z_0 は任意定数である。 従属変数 u は r と t のみに依存すると考える。 すると、方程式 (1) は

$$u_{rr} + ((N-1)/r)u_r - bu_{tt} = F(u) \qquad (4)$$

と変形される。 この (4) 式の厳密解を導くために、この研究会のテーマである広田の方法を用いる[3)]。 まず、変数変換

$$u(r,t) = -i \log \left(\frac{f(r,t)+ig(r,t)}{f(r,t)-ig(r,t)} \right)$$

$$= 2 \tan^{-1}(g(r,t)/f(r,t)) \qquad (5)$$

を行う。 すると、(4) 式は変形されて、

$$fg\{(D_r{}^2-bD_t{}^2)(g\cdot g-f\cdot f)\} + (f^2-g^2)(D_r{}^2-bD_t{}^2)g\cdot f$$

$$+ \{(N-1)/r\}(f^2+g^2)D_r g\cdot f$$

$$- ck\ [(N+1)\{(k+1)f^4+(1-k)g^4\} + 2(N-3)f^2g^2\ ] = 0 \qquad (6)$$

となる。 この (6) 式を次の三つの部分に分けて、3式すべてを満たす解を求める。

$$(D_r{}^2-bD_t{}^2)(g\cdot g-f\cdot f) = 0,$$

$$(D_r{}^2-bD_t{}^2)g\cdot f-2c\{(k+1)f^2-(k-1)g^2\}=0,$$

$$(N-1)[(1/r)D_r g\cdot f-c\{(k+1)f^2+(k-1)g^2\}]=0 \qquad (7)$$

まず、k=1 の場合には、(7) 式の解は

$$g=c\{r^2-b^{-1}(t-t_0)^2\},\ f=1 \qquad (8)$$

と書ける。　ここで、t_0 は任意定数である。　一方、k=-1 の場合には、(7) 式の解は

$$g=1,\quad f=c\{r^2-b^{-1}(t-t_0)^2\} \tag{9}$$

と書ける。　これらの解は、空間の次元 N には無関係である。(5) 式を用いて、元の変数で表わすと、k=1 の場合の解 u_1 は、

$$u_1(r,t) = 2\tan^{-1}[\ c\{r^2-b^{-1}(t-t_0)^2\}\ ],$$

$$u_1(x,y,z,t) = 2\tan^{-1}[c\{(x-x_0)^2+a_1'(y-y_0)^2 +a_2'(z-z_0)^2-b^{-1}(t-t_0)^2\}] \tag{10}$$

k=-1 の場合の解 u_2 は、

$$u_2(r,t) = 2\cot^{-1}[\ c\{r^2-b^{-1}(t-t_0)^2\}\ ],$$

$$u_2(x,y,z,t) = 2\cot^{-1}[c\{(x-x_0)^2+a_1'(y-y_0)^2 +a_2'(z-z_0)^2-b^{-1}(t-t_0)^2\}] \tag{11}$$

と表わせる。　原点での値は、$u_1(r=0,t=0)=0$ および $u_2(r=0,t=0)=\pi$ である。　これらの解は、ミンコフスキー空間ではローレンツ不変である。　b>0 （ミンコフスキー空間）の場合に、r,t が大きいところでの $u_1(r,t)$ と $u_2(r,t)$

の振舞いは、

$$u_1(\infty, t) = (c/|c|)\pi,\quad u_1(r, \pm\infty) = (-c/|c|)\pi,$$

$$u_2(\infty, t) = (1 - c/|c|)\pi,\quad u_2(r, \pm\infty) = (1 + c/|c|)\pi,$$

$$(\mathrm{mod}\ 2\pi) \qquad (12)$$

となる。　図1は、解 $u_1(r,t)$ を $b=1,\ c=1$ の場合に描いたものである。

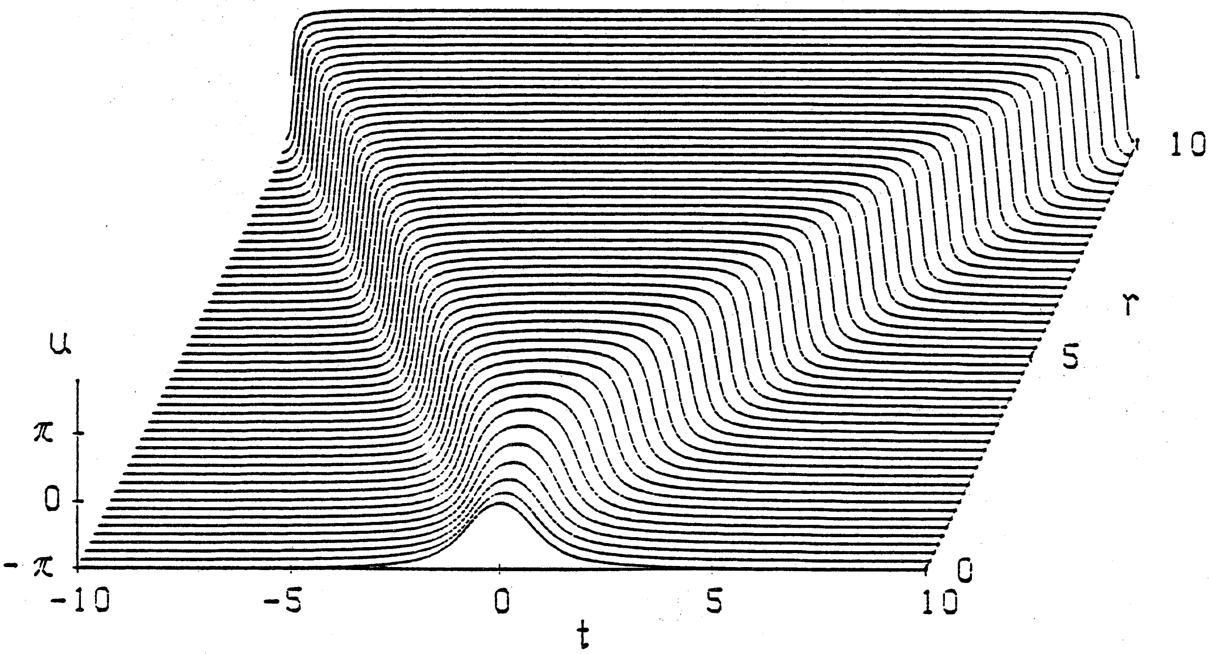

図 1

次に、$b<0$ （ユークリッド空間）の場合の、r, t が大きいところでの $u_1(r,t)$ と $u_2(r,t)$ の振舞いは、

$$u_1(\infty, t)=u_1(r, \pm\infty)=c/|c|\,\pi,$$

$$u_2(\infty, t)=u_2(r, \pm\infty)=(1-c/|c|)\,\pi, \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \qquad (13)$$

となる。　図２は、解 $u_2(r, t)$ を $b=-1$, $c=1$ の場合に描いたものである。

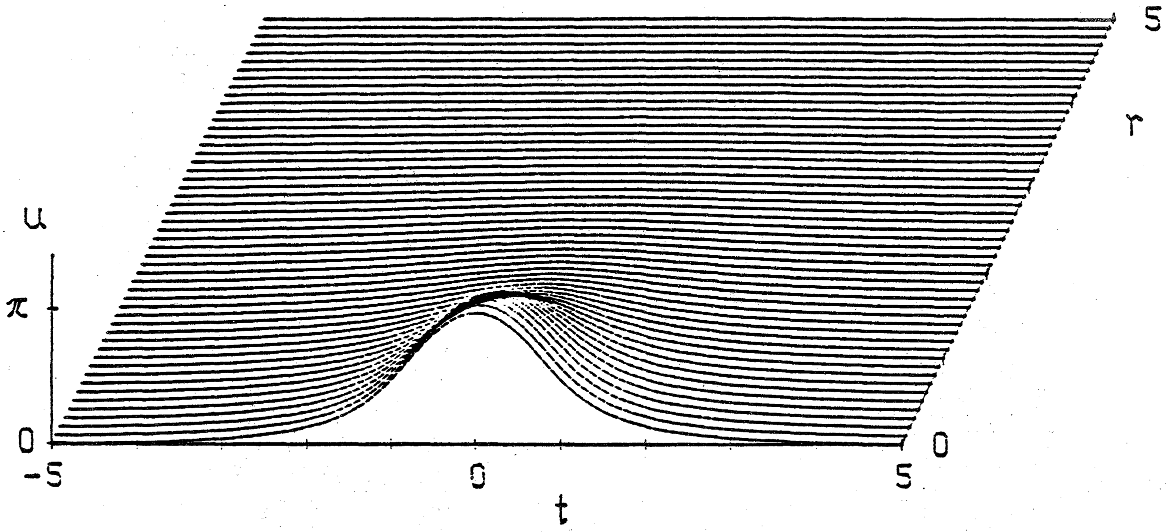

図２

図２から分かるように、ユークリッド空間の解は、インスタントン[4)]と同様に局在化していることが分かる。　もし (1) 式で、x を $x'=(x-vt)(1-bv^2)^{(-1/2)}$ と変換し、(2) 式で N を N-1 とおきかえると、(1) 式はユークリッド空間の方程式

となり、 u_2 と同じ形の解を持つ。 従って、先ほどの議論とまったく同様にして x 方向に速度 v で動く局在化した波の解 $u(x',y,z)$ が得られる。 これらの解の振舞いから、新しい方程式は物理のいろいろな分野の現実的なモデルを記述するソリトン系となる可能性を持っていると考えられる。

次に、(1) 式の右辺 $F(u)$ がもう少し一般的な周期関数の場合について述べる。 $F(u)$ として、(2) 式の代わりに

$$F(u) = 2c_1 k m^2 \{(\tan(u/2))^k - c_0\}^{(1-m)} \left[\cos(2u) + k\{2+(N-1)/m\}\cos(u) + \{1+(N-1)/m\} + kc_0 \sin(2u) + 2c_0 \sin(u) \right], \quad k=\pm 1 \qquad (14)$$

を考える。 ここで m, c_0, c_1 は定数である。 この方程式の解 u は、$k=1$ の場合の解 u_3 として、

$$u_3(r,t) = 2 \tan^{-1}[c_0 + c_1\{r^2-b^{-1}(t-t_0)^2\}^{(m/2)}],$$

$$u_3(x,y,z,t) = 2 \tan^{-1}[c_0 + c_1\{(x-x_0)^2 +a_1'(y-y_0)^2 + a_2'(z-z_0)^2 -b^{-1}(t-t_0)^2\}^{(m/2)}] \qquad (15)$$

$k=-1$ の場合の解 u_4 として、

$$u_4(r,t) = 2 \cot^{-1}[c_0 + c_1\{r^2-b^{-1}(t-t_0)^2\}^{(m/2)}],$$

$$u_4(x,y,z,t) = 2\cot^{-1}[\,c_0 + c_1\{(x-x_0)^2 + a_1'(y-y_0)^2 + a_2'(z-z_0)^2 - b^{-1}(t-t_0)^2\}^{(m/2)}\,] \quad (16)$$

と表わせる。 先に述べた (2) 式の F(u) は、(14) 式で $c_0=0$, $m=1$, $c_1=c$ とした場合にあたり、このとき (15), (16) 式の u_3, u_4 は、それぞれ (10), (11) 式の u_1, u_2 になる。

以上述べた方程式は、サイン・ゴルドン方程式に似た方程式になっており、非線形関数の部分が sin 関数の代わりに sin 関数と cos 関数で書かれる簡単な周期関数になっている。 また、解についていえば、空間1次元のときだけでなく、空間が2次元、3次元の場合にも1次元のときと同様に簡単な解になっており、多次元非線形クライン・ゴルドン方程式の一つとして今後研究していく意味があると思われる。

引用文献

1) A. Nakamura: Prog. Theor. Phys. Supple. No.94 (1988) 195.

2) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 3309.

3) R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. 33 (1972) 1459.
R. Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. 35 (1973) 1566.

R. Hirota and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. Supple. No.59 (1976) 64.

4) A. Polyakov: JETP Lett. 20 (1974) 194

A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz and Y.Tyupkin: Phys. Lett. 59B (1975) 85.